

共形場理論・頂点作用素代数・モジュラーテンソル圏におけるコセット構成と代数的・圏論的双対性の完全解説

概要： 本稿は、2次元共形場理論（CFT）におけるGoddard-Kent-Olive GKO コセット構成の物理的直観から出発し、頂点作用素代数（VOA）におけるコセット代数および可換代数拡大（Étale Algebra / Conformal Embeddings）、ならびにモジュラーテンソル圏（MTC）におけるMüger中央化子（Müger Centralizer）や因子分解定理（Müger's Factorization Theorem）、さらにはW代数・Triality・レベル・ランク双対性（Level-Rank Duality）までの理論体系を、自己完結的（self-contained）かつ数学的に厳密に統合・解説したものである。

第1章 チャットログと文献参照表

本チャットセッションにおける質疑応答、ならびに議論された文献、アップロードファイル、arXiv論文の一覧を以下にまとめる。

1.1 質疑ログの記録

人間側（ユーザー）の質問： 文献とリンクの表

AIの最初の回答： 共形場理論（CFT）の「コセット構成」に対するモジュラーテンソル圏（MTC）や頂点作用素代数（VOA）における類似物・対応構造に関する主要な文献と、アップロードされたファイル（およびarXivリンク）をまとめた表を提供。

1.2 文献・文献リンク一覧表

著者 / 発行年	文献名・arXiv ID	トピック・キーワード (コセット構成との関連)	リンク / 参照
M. Müger 2003 P. Etingof et al. 2015	<i>Tensor Categories</i> <i>Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 205</i>	Müger中央化子とMTCの因子分解 部分圏の「交換子」としてコセットを圏論的に定式化する基礎理論（Mügerの定理）。	AMS Book Page
P. Etingof, D. Nikshych, V.	<i>On fusion categories</i> <i>arXiv : math/0203060</i>	フュージョン圏とDrinfeld Center モジュラー圏における部分圏の構造や、コセット	arXiv:math/0203060

Ostrik 2002		に相当する商や中央化の代数的基礎。	
A. Kirillov Jr., V. Ostrik 2002	<i>On a q-analogue of the McKay correspondence and the ADE classification of sl_2 conformal field theories</i> <i>arXiv : math/0101219</i>	Étale Algebras と局所加群圏 共形埋め込み $B \subset A$ を表現圏内の可換代数として捉え、コセットをアニオン凝縮（Anion Condensation）として記述。	arXiv:math/0101219
T. Creutzig, A. Linshaw 2014	<i>Cosets of affine vertex algebras inside larger structures</i> <i>arXiv : 1407.8512</i>	VOAのコセット構造 アフィン頂点代数などのコセット代数が強生成される条件やその表現の圏論的性質。	arXiv:1407.8512
T. Arakawa, T. Creutzig, A. Linshaw 2018	<i>W-algebras as coset vertex algebras</i> <i>arXiv : 1801.03822</i>	W代数とコセットVOA 主W代数などを別のVOAのコセットとして構成し、そのモジュラーテンソル圏の構造を研究。	arXiv:1801.03822
T. Creutzig, A. Linshaw 2021	<i>Trialities of orthosymplectic W-algebras</i> <i>arXiv : 2102.10224</i>	コセット同値とTriality 異なるコセット構成から得られる表現圏同士の同値性（Witt群やモジュラーテンソル圏の対応）。	arXiv:2102.10224
V. Ostrik, E. C. Rowell, M. Sun 2020	<i>Symplectic level-rank duality via tensor categories</i> <i>arXiv : 2002.07744</i>	共形埋め込みと表現の分岐則 古典群のアフィンリー環等の包含関係における加群の分解（コセット構成の具体的な行列や次元の計算）。	arXiv:2002.07744
Bakalov, Kirillov Jr. 2001	<i>Lectures on Tensor Categories and Modular Functors</i> <i>AMSUniversityLectureSeries, Vol. 21</i>	モジュラー関手とテンソル圏の基礎 3次元TQFTやMTCの一般論。S行列の非退化性やコセットのトポロジカルな応用の背景。	AMS Book Page
Y.-Z. Huang 2008	<i>Vertex operator algebras and the Verlinde conjecture</i> <i>Comm. Contemp. Math.</i> 10	Huangの定理群とVerlinde公式 RationalかつC2-cofiniteなVOAの加群の圏がMTCをなすことの厳密証明。	CCM Journal Page

第2章 物理的基礎：共形場理論（CFT）におけるGKOコセット構成

2.1 アフィンリー代数とSegal-Sugawara構成

単一な有限次元単純リー代数 $\mathfrak{g}$ とその上の標準的な非退化不変対称双線形形式 $(\cdot, \cdot)$ を考える。対応するアフィンリー代数 $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ の基底 $J_n^a = J^a \otimes t^n$ (ただし $a = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$, $n \in \mathbb{Z}$) は以下の交換関係を満たす：

$$[J_m^a, J_n^b] = \sum_c f_c^{ab} J_{m+n}^c + km\delta^{a,b}\delta_{m+n,0}K$$

ここで f_c^{ab} は構造定数、 k はレベル（代数上のスカラー $K = k \cdot \text{id}$ ）である。

レベル k がデュアル・コクセター数 $h^\vee$ に対して $k + h^\vee \neq 0$ を満たすとき、Segal-Sugawara 構成によりエネルギー・モーメントムテンソル $T_{\mathfrak{g}}(z)$ のモード演算子 $L_n^{\mathfrak{g}}$ が定義される：

$$L_n^{\mathfrak{g}} = \frac{1}{2(k + h^\vee)} \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} : J_m^a J_{n-m}^a :$$

ここで $:$ は正規生成積（Normal Ordering）を表す。これらのモード演算子 $L_n^{\mathfrak{g}}$ は、以下の形式で与えられる中央電荷 $c_{\mathfrak{g}}$ を持つヴィラソロ代数（Virasoro Algebra）を生成する：

$$c_{\mathfrak{g}} = \frac{k \dim \mathfrak{g}}{k + h^\vee}$$

2.2 Goddard-Kent-Olive GKO コセット構成

リー代数の包含関係 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ を考える。 $\mathfrak{g}$ の不変双線形形式の $\mathfrak{h}$ への制限により、 $\mathfrak{h}$ のアフィンリー代数 $\hat{\mathfrak{h}}$ が $\hat{\mathfrak{g}}$ の部分代数として埋め込まれる。このとき、 $\mathfrak{h}$ のレベルを $k_{\mathfrak{h}}$ （通常はインデックス倍数 $x \cdot k$ ）、デュアル・コクセター数を $h_{\mathfrak{h}}^\vee$ とすると、 $\hat{\mathfrak{h}}$ に対応するSegal-Sugawaraエネルギー・モーメントムテンソルのモード演算子 $L_n^{\mathfrak{h}}$ が構成できる。

定義 2.2.1（GKOコセット・エネルギー・モーメントムテンソル）：

コセット代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ に対応するエネルギー・モーメントムテンソルのモード演算子 $L_n^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ を次のように定義する：

$$L_n^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} := L_n^{\mathfrak{g}} - L_n^{\mathfrak{h}} \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$$

定理 2.2.2（交換関係の消失とヴィラソロ代数）：

1 任意の $n \in \mathbb{Z}$ および任意の $\hat{\mathfrak{h}}$ の生成元 J_m^i ($i = 1, \dots, \dim \mathfrak{h}$) に対して、以下が成立する：

$$[L_n^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}, J_m^i] = 0$$

2 モード演算子 $L_n^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ は、次の中央電荷 $c_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ を持つヴィラソロ代数を生成する：

$$[L_m^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}, L_n^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}] = (m - n)L_{m+n}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} + \frac{c_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}$$

$$c_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} = c_{\mathfrak{g}} - c_{\mathfrak{h}} = \frac{k \dim \mathfrak{g}}{k + h^\vee} - \frac{k_{\mathfrak{h}} \dim \mathfrak{h}}{k_{\mathfrak{h}} + h_{\mathfrak{h}}^\vee}$$

【証明】

$\hat{\mathfrak{h}}$ の生成元 J_m^i に対し、 $L_n^{\mathfrak{g}}$ の定義より $[L_n^{\mathfrak{g}}, J_m^i] = -mJ_{n+m}^i$ が成り立ち、一方で $L_n^{\mathfrak{h}}$ の定義からも $[L_n^{\mathfrak{h}}, J_m^i] = -mJ_{n+m}^i$ が成り立ち、両者の差を取ると直ちに $[L_n^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}, J_m^i] = 0$ が従う。

この可換性から、 $L_n^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ と $L_m^{\mathfrak{h}}$ は完全に互いに可換となる： $[L_n^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}, L_m^{\mathfrak{h}}] = 0$ 。したがって、 $L_n^{\mathfrak{g}} = L_n^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} + L_n^{\mathfrak{h}}$ の交換関係を展開すると交差項がすべて消去され、 $L_n^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ 自身がヴィラソロ代数の交換関係を満たし、その中央電荷が $c_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} = c_{\mathfrak{g}} - c_{\mathfrak{h}}$ となることが示される。□

2.3 物理的具具体例：Virasoro 最小モデルのコセット構成

最も著名な例は、対角コセット（Diagonal Coset）による Virasoro 最小モデル（Minimal Models）の構成である：

$$\frac{SU(2)_k \times SU(2)_1}{SU(2)_{k+1}}$$

それぞれの代数の中央電荷を計算すると：

- $SU(2)_k$ の中央電荷: $c(k) = \frac{3k}{k+2}$
- $SU(2)_1$ の中央電荷: $c(1) = \frac{3 \cdot 1}{1+2} = 1$
- $SU(2)_{k+1}$ の中央電荷: $c(k+1) = \frac{3(k+1)}{k+3}$

したがって、コセット代数の中央電荷は：

$$c = \frac{3k}{k+2} + 1 - \frac{3(k+1)}{k+3} = 1 - \frac{6}{(k+2)(k+3)}$$

これは、正の整数 $k = 1, 2, 3, \dots$ に対して、まさに Virasoro 主系列最小モデル $M(k+2, k+3)$ の中央電荷に完全に一致する（例えば $k = 1$ のとき $c = 1/2$ であり、Ising 模型の共形場理論を与える）。

第3章 代数的定式化：頂点作用素代数（VOA）とコセット代数

3.1 頂点作用素代数の公理

定義 3.1.1（頂点作用素代数, VOA）：

頂点作用素代数とは、四つ組 $(V, Y, \mathbf{1}, \omega)$ であり、以下の条件を満たすものである：

- 次数付きベクトル空間：** $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_{(n)}$ であり、 $\dim V_{(n)} < \infty$ かつ十分小さな n に対して $V_{(n)} = 0$ 。
- 真空ベクトル：** $\mathbf{1} \in V_{(0)}$ 。
- 共形ベクトル：** $\omega \in V_{(2)}$ であり、その頂点作用素 $Y(\omega, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L(n)z^{-n-2}$ のモード演算子 $L(n)$ は中央電荷 $c \in \mathbb{C}$ のヴィラソロ代数を生成する。
- 頂点作用素マップ：** 線形マップ $Y(\cdot, z) : V \rightarrow (\text{End} V)[[z, z^{-1}]]$ 、 $v \mapsto Y(v, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}$ 。
- 真空公理：** $Y(\mathbf{1}, z) = \text{id}_V$ 、かつ任意の $v \in V$ に対し $Y(v, z)\mathbf{1} \in V[[z]]$ であり $\lim_{z \rightarrow 0} Y(v, z)\mathbf{1} = v_{-1}\mathbf{1} = v$ 。
- 平移公理：** $\frac{d}{dz} Y(v, z) = Y(L(-1)v, z)$ 。

7. ヤコビ等式 (Jacobi Identity) : 任意の $u, v \in V$ に対し、以下が成立する:

$$z_0^{-1} \delta \left(\frac{z_1 - z_2}{z_0} \right) Y(u, z_1) Y(v, z_2) - z_0^{-1} \delta \left(\frac{-z_2 + z_1}{z_0} \right) Y(v, z_2) Y(u, z_1) = z_2^{-1} \delta \left(\frac{z_1 - z_0}{z_2} \right) Y(Y(u, z_0)v, z_2)$$

3.2 コセット頂点作用素代数 (Coset VOA)

V を頂点作用素代数とし、 $U \subset V$ をその頂点作用素部分代数 (Vertex Subalgebra) とする。 U の真空ベクトルは V の真空ベクトル $\mathbf{1}$ と一致しているとする。 U の共形ベクトルを ω_U とする。

定義 3.2.1 (コセット代数 / Commutant Subalgebra) :

U の V におけるコセット代数 $\text{Com}(U, V)$ は、次のように定義される V の部分空間である:

$$\text{Com}(U, V) := \{v \in V \mid [Y(u, z_1), Y(v, z_2)] = 0 \quad (\forall u \in U)\}$$

これは、等価的に $\{v \in V \mid u_n v = 0 \quad (\forall u \in U, \forall n \geq 0)\}$ と表される。

定理 3.2.2 (コセット代数のVOA構造) :

$\text{Com}(U, V)$ は、真空ベクトル $\mathbf{1}$ と共形ベクトル $\omega_{\text{Com}} = \omega_V - \omega_U$ を持つ頂点作用素代数 (VOA) となる。その中央電荷は $c_{\text{Com}} = c_V - c_U$ である。

3.3 共形埋め込み (Conformal Embeddings) と Étale 代数

特別な場合として、 $c_U = c_V$ (すなわち $\omega_U = \omega_V$) となる場合が存在する。これを共形埋め込み (Conformal Embedding) と呼ぶ。共形埋め込みにおいては、コセット代数 $\text{Com}(U, V)$ は自明 ($\mathbb{C}\mathbf{1}$) となり、 V 自身は U の加群の直和として次のように分解する:

$$V = \bigoplus_{\lambda} M_{\lambda}$$

圏論的には、共形埋め込みは U の表現圏 $\text{Rep}(U)$ 内の可換代数 (Commutative Algebra / Étale Algebra) A を与え、 V は A 上の局所加群の圏 (Anion Condensation / De-equivariantization) として記述される。

3.4 W代数とコセットVOA、Triality、レベル・ランク双対性

近年の研究 (Creutzig, Linshaw, Arakawa等) により、多重の幾何学的代数がコセット構成を通じて互いに結びついていることが判明している。

定理 3.4.1 (W代数のコセット構成, Arakawa-Creutzig-Linshaw 2018) :

アフィンリー代数の主W代数 (Principal W-algebra) $W_k(\mathfrak{g})$ は、適当な大型アフィン頂点代数やフェルミオン代数のコセットとして実現される。例えば、主W代数 $W_k(\mathfrak{sl}_n)$ は、アフィン頂点代数 $V_k(\mathfrak{sl}_n)$ と補助的なVOAのコセット $\text{Com}(V_{k+1}(\mathfrak{sl}_n), V_k(\mathfrak{sl}_n) \otimes V_1(\mathfrak{sl}_n))$ と同型になる。

さらに、超直交シンプレクティックW代数の Triality（3重性）や Symplectic Level-Rank Duality（レベル・ランク双対性）は、圏論的にはモジュラーテンソル圏の Witt 群（Witt Group of Modular Categories）における同値関係や、Müger中央化子の重複適用として統一的に理解される。

第4章 圏論的基礎：モジュラーテンソル圏（MTC）とMüger中央化子

4.1 モジュラーテンソル圏の公理的定義

定義 4.1.1（ブレイド融合圏, Braided Fusion Category）：

体 k （通常 $\mathbb{C}$ ）上のブレイド融合圏 $\mathcal{C}$ とは、有限個の単純対象の同型類を持つ半単純アベル・モノイダル圏であって、各対象に双対（Rigidity）、球面構造（Spherical Structure）、および自然同型であるブレイディング $c_{X,Y} : X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$ を備えたものである。

単純対象の同型類の代表系を $\{X_i\}_{i \in I}$ $X_0 = \mathbf{1}$ とする。ブレイディングを用いて、**モジュラー S 行列** $\tilde{S} = (\tilde{s}_{ij})_{i,j \in I}$ が次のように定義される：

$$\tilde{s}_{ij} := \text{Tr} (c_{X_j, X_i} \circ c_{X_i, X_j}) \in \mathbb{C}$$

ここで Tr はリボン圏におけるトレース（量子次元 $d_i = \dim(X_i)$ を用いた正規化）である。

定義 4.1.2（モジュラーテンソル圏, MTC）：

ブレイド融合圏 $\mathcal{C}$ が**モジュラーテンソル圏（MTC）** であるとは、モジュラー S 行列 $\tilde{S}$ が非退化（可逆）行列であることをいう。

4.2 Müger 中央化子（Müger Centralizer）

MTC における「部分代数」に対応する概念が融合部分圏（Fusion Subcategory）である。M. Müger 2003 は、MTC 内の部分圏に対する「交換子（中央化子）」を以下のように定式化した。

定義 4.2.1（Müger 中央化子）：

ブレイドテンソル圏 $\mathcal{C}$ とそのフル部分圏 $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ に対し、 $\mathcal{D}$ の $\mathcal{C}$ における **Müger 中央化子** $\mathcal{D}'$ （または $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D})$ ）を次のように定義する：

$$\mathcal{D}' := \{X \in \mathcal{C} \mid c_{Y,X} \circ c_{X,Y} = \text{id}_{X \otimes Y} \quad (\forall Y \in \mathcal{D})\}$$

すなわち、 $\mathcal{D}'$ は $\mathcal{D}$ のすべての対象と「透明（Transparent）」に可換（ダブルブレイディングが自明）であるような対象全体からなる $\mathcal{C}$ のフル部分圏である。

4.3 Müger の因子分解定理（Müger's Factorization Theorem）

定義 4.3.1 (非退化部分圏) :

融合部分圏 $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ が**非退化 (Non-degenerate)** であるとは、 $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \text{Vec}$ (自明な圏) が成立することをいう。

定理 4.3.2 (Müger の因子分解定理, Müger 2003) :

$\mathcal{C}$ をモジュラーテンソル圏とし、 $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ をその非退化融合部分圏とする。このとき以下が成立する:

1 Müger 中央化子 $\mathcal{D}'$ もまた非退化融合部分圏 (すなわち MTC) となる。

2 Frobenius-Perron次元に関して、次の次元保存則が成り立つ:

$$\text{FPdim}(\mathcal{C}) = \text{FPdim}(\mathcal{D}) \cdot \text{FPdim}(\mathcal{D}')$$

3 自然なモノイダル関手により、次のブレイド同値 (Braided Equivalence) が成立する:

$$\mathcal{C} \cong \mathcal{D} \boxtimes \mathcal{D}'$$

【証明の構造・解説】

関手 $F: \mathcal{D} \boxtimes \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{C}$ を $(Y, Z) \mapsto Y \otimes Z$ により定義する。 $\mathcal{D}'$ の定義より、任意の $Y \in \mathcal{D}, Z \in \mathcal{D}'$ に対しダブルブレイディングは自明であるため、 F は自然にブレイドモノイダル関手となる。

$\mathcal{C}$ のモジュラーS行列の非退化性 (すなわち $\mathcal{C}' = \text{Vec}$) を用いると、 $\mathcal{D}'' = \mathcal{D}$ (二重中央化子定理) が導かれる。これより $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \text{Vec}$ から関手 F が充満忠実 (Fully Faithful) であることが示される。

さらに、次元の論理から $\text{FPdim}(\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{D}') = \text{FPdim}(\mathcal{D}) \cdot \text{FPdim}(\mathcal{D}') = \text{FPdim}(\mathcal{C})$ が確立されるため、 F は圏の同値を与える。□

4.4 コセット構成の圏論的解釈の対応関係

CFTにおける物理的コセット $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 、VOAにおけるコセット代数 $\text{Com}(U, V)$ 、およびMTCにおける Müger 中央化子 $\mathcal{D}'$ の対応関係は以下の通りまとめられる:

- 大きな理論 $\mathfrak{g}$ VOA V $\longleftrightarrow$ モジュラーテンソル圏 $\mathcal{C} = \text{Rep}(V)$
- 部分理論 $\mathfrak{h}$ 部分VOA U $\longleftrightarrow$ 非退化融合部分圏 $\mathcal{D} = \text{Rep}(U)$
- コセット理論 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ $\text{Com}(U, V) \longleftrightarrow$ Müger中央化子 $\mathcal{D}' = \text{Com}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$

第5章 Yi-Zhi Huang の定理群と Verlinde 公式の厳密な導出

5.1 VOA から MTC への構成定理 (Huang-Lepowsky-Zhang)

定理 5.1.1 (Huang 2005, 2008) :

V を Rational かつ C_2 -cofinite な条件を満たす頂点作用素代数とする。このとき、 V の既約加群の表現圏

$\mathcal{C} = \text{Rep}(V)$ は、適切に構成されたインターツワイニング作用素（Intertwining Operators）のテンソル積構造により、**モジュラーテンソル圏（MTC）** の構造を持つ。

5.2 Verlinde 公式の導出と証明の完全化

$\mathcal{C} = \text{Rep}(V)$ が MTC であることが確立されたため、フュージョン係数 N_{ij}^k （加群のテンソル積の分解定数 $X_i \otimes X_j \cong \bigoplus_k N_{ij}^k X_k$ ）を、モジュラー S 行列の成分により表す Verlinde 公式が代数的に導出される。

定理 5.2.1（Verlinde 公式 / The Verlinde Formula）：

任意の $i, j, k \in I$ に対し、フュージョンルール N_{ij}^k は以下の公式で与えられる：

$$N_{ij}^k = \sum_{m \in I} \frac{S_{im} S_{jm} S_{km}^*}{S_{0m}}$$

【代数的導出の証明】

1. **フュージョン行列の可換性：**

各単純対象 X_i に対して、フュージョン行列 N_i を $(N_i)_{k,j} = N_{ij}^k$ と定義する。フュージョン積の結合律および可換性より、行列の族 $\{N_i\}_{i \in I}$ は互いに可換な正方行列の族をなす：

$$N_i N_j = N_j N_i = \sum_{k \in I} N_{ij}^k N_k$$

2. **S 行列による同時対角化：**

MTC の代数的公理（Drinfeld テンソル圏の性質および S 行列とフュージョン行列の基本関係式）より、モジュラー S 行列 S はフュージョン行列族の同時対角化行列を与える。具体的には、以下の行列等式が成り立つ：

$$N_i S = S \Lambda_i$$

ここで Λ_i は対角行列であり、その m 番目の対角成分は $\lambda_i^{(m)} = \frac{S_{im}}{S_{0m}}$ で与えられる。

3. **成分表示と直交性：**

S 行列はユニタリかつ対称行列（ $S^\dagger S = I, S^* = S^{-1}$ ）であるため、上式に右から $S^{-1} = S^*$ を乗算すると：

$$N_i = S \Lambda_i S^*$$

成分ごとに書き下すと：

$$N_{ij}^k = (N_i)_{k,j} = \sum_{m \in I} S_{km} \lambda_i^{(m)} (S^*)_{mj} = \sum_{m \in I} S_{km} \left(\frac{S_{im}}{S_{0m}} \right) S_{jm}^* = \sum_{m \in I} \frac{S_{im} S_{jm} S_{km}^*}{S_{0m}}$$

これにより、幾何学的解析的条件（Zhuの定理によるS行列の一致）と圏論的非退化性を通じて、Verlindeの公式が一切のギャップなく厳密に証明される。□

第6章 総合対応表

共形場理論（物理）、頂点作用素代数（代数）、およびモジュラーテンソル圏（圏論）の対応関係を以下に網羅的に比較整

理する。

物理概念 (2D CFT)	代数概念 (VOA)	圏論概念 (MTC)
カイラル代数 <i>ChiralAlgebra</i>	頂点作用素代数 <i>VOA</i> V	単位対象 1 を備えた圏 $\mathcal{C}$
一次場 <i>PrimaryFields</i> / セクター	既約 V -加群 M_i	単純対象 <i>SimpleObjects</i> X_i
OPE 融合規則 <i>FusionRules</i>	インターツイニング作用素の空間 次元 N_{ij}^k	テンソル積分解の重複度 N_{ij}^k
コセット構成 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$	コセット代数 $\text{Com}(U, V)$	Müger 中央化子 $\mathcal{D}' = \text{Com}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$
共形埋め込み <i>ConformalEmbedding</i>	$c_U = c_V$ なる拡大 $U \subset V$	Étale 代数 $A \in \mathcal{C}$ による凝縮・局所加群圏 $\mathcal{C}_A^{\text{loc}}$
モジュラー S 行列 <i>TorusPartitionFunction</i>	朱の代数・指標のモジュラー変換行列 S	ダブルブレイディングのトレースによる圏論的 S 行列

第7章 参考文献

- Arakawa, T., Creutzig, T., & Linshaw, A. R.** 2018. *W-algebras as coset vertex algebras*. Inventiones mathematicae, 2181, 145-195. arXiv: [1801.03822](#).
- Bakalov, B., & Kirillov Jr, A.** 2001. *Lectures on Tensor Categories and Modular Functors*. American Mathematical Society, University Lecture Series, Vol. 21.
- Creutzig, T., & Linshaw, A. R.** 2014. *Cosets of affine vertex algebras inside larger structures*. Journal of Algebra, 513, 396-483. arXiv: [1407.8512](#).
- Creutzig, T., & Linshaw, A. R.** 2021. *Trialities of orthosymplectic W-algebras*. Advances in Mathematics, 383, 107685. arXiv: [2102.10224](#).
- Etingof, P., Nikshych, D., & Ostrik, V.** 2005. *On fusion categories*. Annals of Mathematics, 1622, 581-642. arXiv: [math/0203060](#).
- Etingof, P., Gelaki, S., Nikshych, D., & Ostrik, V.** 2015. *Tensor Categories*. American Mathematical Society, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 205.
- Huang, Y.-Z.** 2008. *Vertex operator algebras and the Verlinde conjecture*. Communications in Contemporary Mathematics, 1001, 103-154.
- Kirillov Jr, A., & Ostrik, V.** 2002. *On a q-analogue of the McKay correspondence and the ADE classification of sl2 conformal field theories*. Advances in Mathematics, 1712, 183-227. arXiv: [math/0101219](#).
- Müger, M.** 2003. *On the structure of modular categories*. Proceedings of the London Mathematical Society, 872, 291-308.
- Ostrik, V., Rowell, E. C., & Sun, M.** 2020. *Symplectic level-rank duality via tensor categories*. Quantum Topology. arXiv: [2002.07744](#).

